数理解析研究所講究録
941巻 1996年 194-199

24.

次数低下した有理関数の誤差評価

甲斐博 (愛媛大学・工)
菅野幸夫 (愛媛大学大学院)
野田松太郎 (愛媛大学・工)

Abstract. *Error bounds of a reduced rational function are obtained by using interval analysis. The reduced rational function is defined as a rational function where approximate common factor in its numerator and denominator polynomials is removed by using approximate-GCD algorithm. We show a width of an interval rational function gives the error bounds between a given rational function and the reduced rational fcuntion. Numerical examples show that the reduced rational function is very accurate approximation of the given rational function in a range.*

24.1 はじめに

有理関数近似の中でも有理関数補間は, 与えられた関数の近似だけでなくデータ列の近似にも有効であり,Gauss の消去法により容易に計算できる. しかし有理関数補間により得られる近似は, 近似する関数が近似区間で連続であるにもかかわらず, 一般に不必要な特異点を持つ.

そこで, 有理関数補間の分子と分母の多項式の近似的 GCD を求め, 得られた近似的 GCD を近似除算により取り除く. この方法をハイブリッド有理関数近似 (HRFA)[3] と呼ぶ. ここで近似的 GCD を取り除き, 次数低下した有理関数は与えた関数値やデータ列の値と一致しなくなる. つまり有理関数補間は与えられたデータ列について到達不能になる.HRFA により得られた有理関数と与えられたデータ列の値の間のずれ, 誤差を確定することは,HRFA の実際的応用の上から必須となる. この点に着目し, 我々はすでに誤差の評価の方法として,Padé 近似の性質を用いる方法 [3] や区間演算を用いる方法 [1] を提案してきた. しかし, 前者は取り除く近似的 GCD の次数を 1 と仮定しており制約が大きい. ま

た, 後者は分子と分母の多項式の零点をあらかじめ知っている必要があった.

本稿では,[1] と同じく区間演算の手法を用いて, 近似的 GCD を取り除く時生じる誤差の評価を行う. この方法では分子と分母の多項式の零点をあらかじめ与える必要は無い.

24.2 区間数

始めに本稿で用いる区関数に関する定義を与える.

定義 2.1. (区間数と区間数の幅) 区間数 A は$\underline{A}, \overline{A} \in \mathbf{R}, \underline{A} \leq \overline{A}$ に対し,$A = [\underline{A}, \overline{A}]$ とする. 区関数 A の幅は, $w(A) = \overline{A} - \underline{A}$.

定義 2.2. (区間多項式と区間有理関数) 係数に区間数を持つ多項式を区間多項式と呼ぶ. また, 区間多項式を分子と分母に持つ有理関数を区間有理関数と呼ぶ.

定義 2.3. (区間多項式の値) $P(x) = P(A_1, A_2, \cdots, A_M, b_1, b_2, \cdots, b_N; x)$ を区間多項式とする. ここで, $A_1, A_2, \cdots, A_M$ と $b_1, b_2, \cdots, b_N$ はそれぞれ $P(x)$ の区関係数と実係数を表す. $P(x)$ の $x = x_0$ での値は次のように評価される.

$$P(x_0) = \{P(a_1, a_2, \cdots, a_M, b_1, b_2, \cdots, b_N; x = x_0) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, M\}$$

定義 2.4. (区間有理関数の値) $R(x) = R(A_1, A_2, \cdots, A_M, b_1, b_2, \cdots, b_N; x)$ を区間有理関数とする. ここで, $A_1, A_2, \cdots, A_M$ と $b_1, b_2, \cdots, b_N$ はそれぞれ $R(x)$ の区関係数と実係数を表す. $R(x)$ の $x = x_0$ での値は次のように評価される.

$$R(x_0) = \{R(a_1, a_2, \cdots, a_M, b_1, b_2, \cdots, b_N; x = x_0) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, M\}$$

注意 2.5. 分母の多項式の値が零を含む時, 区間有理関数の値は定義されない.

定義 2.6. (多項式と区間多項式の関係) $p(x)$ を実係数多項式とする. 任意の $x_0 \in \mathbf{R}$ に対し $p(x_0) \in P(x_0)$ が成り立つ時,$p(x) \in P(x)$ と表す.

定義 2.7. (有理関数と区間有理関数の関係) $r(x)$ を実係数有理関数とする. 任意の $x_0 \in D$ に対し $r(x_0) \in R(x_0)$ が成り立つ時,$r(x) \in R(x)$ と表す. ここで,D は $R(x)$ の値の定義される x の変域を表す.

24.3 次数低下した有理関数

分子と分母の多項式の次数がそれぞれ m, n の有理関数

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$$

を考える. ここで, ある $\epsilon \ll 1$ を与えて,k次の近似的 GCD $g_k(x) = \text{Apx-GCD}(p_m(x), q_n(x), \epsilon)$ が得

られたとする．その時,$r_{m,n}(x)$ は次のように表される．

$$r_{m,n}(x) = \frac{\tilde{p}_{m-k}(x)g_k(x) + \Delta p_{k-1}(x)}{\tilde{q}_{n-k}(x)g_k(x) + \Delta q_{k-1}(x)}$$

ここで, $\tilde{p}_{m-k}(x)$,$\tilde{q}_{n-k}(x)$ はそれぞれ $p_m(x)$,$q_n(x)$ を $g_k(x)$ で割った時の商の多項式である．また,$\Delta p_{k-1}(x)$, $\Delta q_{k-1}(x)$ はその剰余の多項式である．これらを

$$\tilde{p}_{m-k}(x)g_k(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \qquad \tilde{q}_{n-k}(x)g_k(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

$$\Delta p_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta a_i x^i, \qquad \Delta q_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta b_i x^i,$$

で表す．通常の GCD 計算の場合, $\Delta p_{k-1}(x) = \Delta p_{k-1}(x) = 0$ である．その時, $r_{m,n}(x) = \tilde{p}_{m-k}(x)/\tilde{q}_{n-k}(x)$ である．ここでは, 近似的 GCD の定義より $\mathrm{mmc}(\Delta p_{k-1}(x)) = O(\epsilon)$, $\mathrm{mmc}(\Delta q_{k-1}(x)) = O(\epsilon)$ である．従って,$\Delta p_{k-1}(x)$,$\Delta q_{k-1}(x)$ を無視し, $r_{m,n}(x) \approx \tilde{r}_{m-k,n-k}(x) = \tilde{p}_{m-k}(x)/\tilde{q}_{n-k}(x)$ とする.$\tilde{r}_{m-k,n-k}(x)$ を**次数低下した有理関数**と呼ぶ．ここで,$r_{m,n}(x)$ と$\tilde{r}_{m-k,n-k}(x)$ の誤差が問題になる．

次の区間有理関数を考える．

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\sum_{i=k}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{k-1} A_i x^i}{\sum_{i=k}^{m} b_i x^i + \sum_{i=0}^{k-1} B_i x^i}.$$

係数 A_i, B_iは区間数であり, $\Delta a_i \geq 0$ ならば $A_i = [a_i, a_i + \Delta a_i]$, $\Delta a_i < 0$ ならば $A_i = [a_i + \Delta a_i, a_i]$ と決める.B_iについても同様に, $\Delta b_i \geq 0$ ならば $B_i = [b_i, b_i + \Delta b_i]$, $\Delta b_i < 0$ ならば $B_i = [b_i + \Delta b_i, b_i]$ とおく．この時, 次の定理が得られる．

定理 3.1. 任意の $x_0 \in D$に対して, $r_{m,n}(x_0) \in R_{m,n}(x_0)$ が成り立つ．

(証明). $p_m(x_0) \in P_m(x_0)$ かつ $q_n(x_0) \in Q_n(x_0)$ である．従って $r_{m,n}(x_0) \in R_{m,n}(x_0)$. よって定理が成り立つ．

定理 3.2. 任意の $x_0 \in D$に対して, $|r_{m,n}(x_0) - \tilde{r}_{m-k,n-k}(x_0)| \leq w(R_{m,n}(x_0))$ が成り立つ．

(証明). $\tilde{p}_{m-k}(x_0)g_k(x_0) \in P_m(x_0)$ かつ$\tilde{q}_{m-k}(x_0)g_k(x_0) \in Q_n(x_0)$ である．従って$\tilde{r}_{m-k,n-k}(x_0) \in R_{m,n}(x_0)$. また, 定理 3.1. より $r_{m,n}(x_0) \in R_{m,n}(x_0)$. 従って $|r_{m,n}(x_0) - \tilde{r}_{m-k,n-k}(x_0)| \leq w(R_{m,n}(x_0))$. よって, 定理が成り立つ．

定理 3.2. を用いて次数低下した有理関数が含む誤差の評価ができる．すなわち, 次数低下した有理関数をΔp_{k-1},Δq_{k-1}の係数の符号に着目して区間有理関数化し, その解を求めることで, 目的が達成できる．

24.4 例題

上で得た次数低下した有理関数近似の誤差評価法の実例を以下に示す．第一は, 近似的 GCD 算法において零判定に用いる cutoff ϵ の大きさと誤差の関係に関してであり, 第二は, 関数近似に HRFA を

用いた場合の誤差評価についてである.

24.4.1 有理関数の根と極が既知の場合

次の 2 つの有理関数を考える. それぞれ分子と分母の多項式はおよそ $x = 0.5$ で近接根を持つ.

$$
\begin{aligned}
r_{3,3}(x) &= \frac{p_3(x)}{q_3(x)} = \frac{(x-2.0)(x-0.51)(x-4.0)}{(x-5.0)(x-0.50)(x-7.0)},\\
\hat{r}_{3,3}(x) &= \frac{\hat{p}_3(x)}{q_3(x)} = \frac{(x-2.0)(x-0.501)(x-4.0)}{(x-5.0)(x-0.50)(x-7.0)}.
\end{aligned}
$$

近似的 GCD の計算は論文 [2] のアルゴリズムを用いる. $r_{3,3}(x)$ に関して, $\epsilon = 0.1$ の $p_3(x)$ と $q_3(x)$ の 近似的 GCD は $g_1(x) = x - 0.548558$ である. この時, $\Delta p_0 = 0.193, \Delta q_0 = 1.395$ となる. 従って, 区間有理関数は,

$$
R_{3,3}(x) = \frac{x^3 - 6.51x^2 + 11.06x + [-4.27, -4.08]}{x^3 - 12.5x^2 + 41x + [-18.9, -17.5]}.
$$

また,$\hat{r}_{3,3}(x)$ に関して,$\epsilon = 0.01$ の近似的 GCD は $\hat{g}_1(x) = x - 0.504896$ である. その時, $\Delta\hat{p}_0 = 0.020, \Delta\hat{q}_0 = 0.14$ である. 区間有理関数は,

$$
\hat{R}_{3,3}(x) = \frac{x^3 - 6.501x^2 + 11.006x + [-4.02836, -4.008]}{x^3 - 12.5x^2 + 41x + [-17.6429, -17.5]}.
$$

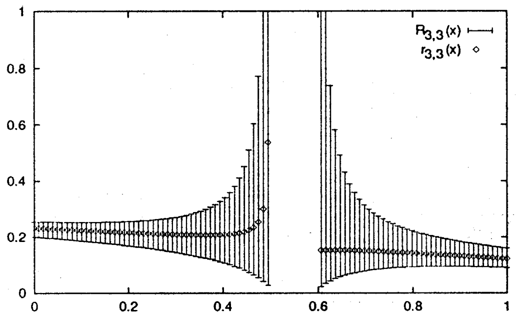

Fig.1 $r_{3,3}(x)$, $R_{3,3}(x)$

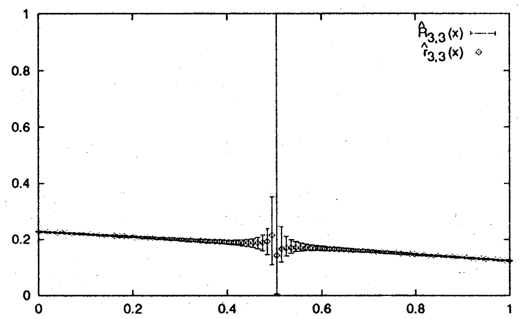

Fig.2 $\hat{r}_{3,3}(x)$, $\hat{R}_{3,3}(x)$

$R_{3,3}(x)$ と$\hat{R}_{3,3}(x)$ の図を Fig.1 と Fig.2 にそれぞれ示す. Fig.1 で空白の変域は $R_{3,3}(x)$ の値の未定義な変域を表す. その近傍では分母の多項式の値が零に近付くため $w(R_{3,3}(x))$ がしだいに大きくなる. これに比較して Fig.2 では $w(\hat{R}_{3,3}(x))$ が小さくなり, 未定義な変域は図に現れない. つまり,ϵ が小さくなると, 区間有理関数の未定義変域と誤差の幅は小さくなる.

24.4.2 浮動小数係数の有理関数の場合

次に, 実際に有理関数補間にこの方法を適用する. $f(x) = \sqrt{1+x}$ を与え, データ列 $(i/20, f(i/20)), i = 0, \cdots, 20$ を求める. このデータ列を補間する有理関数 $r_{10,10}(x)$ を求めると,

$$
r_{10,10}(x) = \frac{p_{10}(x)}{q_{10}(x)},
$$

$$p_{10}(x) = -0.0133x^{10} - 0.294x^9 - 1.31x^8 - 1.27x^7 - 0.227x^6$$
$$-2.76x^5 + 0.460x^4 + 6.38x^3 - 0.895x^2 - 3.11x + 1.00,$$
$$q_{10}(x) = -0.00105x^{10} - 0.0791x^9 - 0.700x^8 - 1.28x^7 + 0.0753x^6$$
$$-1.41x^5 - 1.82x^4 + 5.35x^3 + 1.03x^2 - 3.61x + 1.00,$$

が得られる. ここで,$\epsilon = 10^{-3}$ の $p_{10}(x)$ と $q_{10}(x)$ の近似的 GCD は $g_3(x) = 1.00x^3 - 1.81x^2 + 1.06x - 0.198$ になる. この時,$\Delta p_2(x)$ と $\Delta q_2(x)$ は

$$\Delta p_2(x) = -9.34 \times 10^{-9}x^2 + 9.37 \times 10^{-9}x - 1.90 \times 10^{-9},$$
$$\Delta q_2(x) = -6.91 \times 10^{-9}x^2 + 6.80 \times 10^{-9}x - 1.32 \times 10^{-9}.$$

従って, 区間有理関数は

$$R_{10,10}(x) = \frac{P_{10}(x)}{Q_{10}(x)},$$
$$P_{10}(x) = -0.0133x^{10} - 0.293x^9 - 1.31x^8 - 1.27x^7 - 0.227x^6 - 2.76x^5$$
$$+0.460x^4 + 6.38x^3 + [-0.89528253, -0.89528252]x^2$$
$$+[-3.10508240, -3.10508239]x + [1.00000000, 1.000000001],$$
$$Q_{10}(x) = -0.00104x^{10} - 0.0791x^9 - 0.700x^8 - 1.28x^7 + 0.0753x^6 - 1.41x^5$$
$$-1.82x^4 + 5.35x^3 + [1.03225867, 1.03225868]x^2$$
$$+[-3.60508240, -3.60508239]x + [1.000000000, 1.000000001],$$

となる. またその時, 次数低下した有理関数は

$$\tilde{r}_{7,7}(x) = \frac{-5.05 - 11.3x - 9.61x^2 - 6.12x^3 - 4.32x^4 - 1.87x^5 - 0.318x^6 - 0.0133x^7}{-5.05 - 8.75x - 5.86x^2 - 3.97x^3 - 2.72x^4 - 0.845x^5 - 0.0810x^6 - 0.00105x^7},$$

で得られる.$r_{10,10}(x)$ と $R_{10,10}(x)$ を表す図を次に示す.

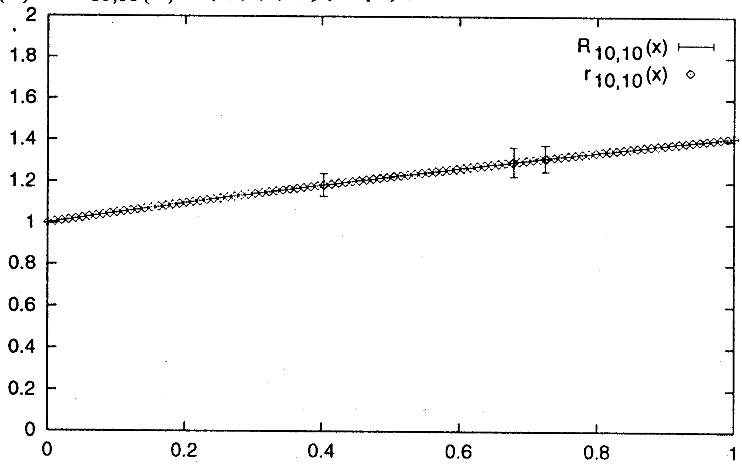

Fig.3 $r_{10,10}(x)$ と $R_{10,10}(x)$

$R_{10,10}(x)$ の未定義な変域は $q_{10}(x)$ の零点近傍, つまり $x \in [0, 1]$ では $x \approx 0.40, 0.68, 0.72$ のまわ

りである.Fig 3. で前の例と同様に $w(R(x))$ は $R(x)$ の未定義の変域に近付くと大きくなる. しかし, $x_i = i/9999, i = 0, \cdots, 9999$ において $w(R(x_i))$ を求め, 平均値を求めると 4.89×10^{-6} である. このように 区間有理関数を用いることにより, 次数低下した有理関数の誤差が $R_{10,10}(x)$ の未定義領域の近傍を除いて非常に小さいことを示し得る.

24.5 結論

区間演算を用いて近似的 GCD を取り除く時, 生じる誤差の評価を行った. その誤差限界は区間有理関数の幅によって計算できる. 実際に有理関数補間に本方法を適用し, 次数低下した有理関数の誤差は未定義な変域の近傍を除いて非常に小さくなることを例題を用いて示した.

参考文献

[1]Hiroshi Kai,Sachio Kanno and Matu-Tarow Noda, Error estimate of reduced rational function, Risa Consortium, 1995, submitted to Computers & Mathematics.

[2]Sasaki, T., and Noda, M.T., Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, J. Inf. Proc. 12, 1989, 159–168.

[3]甲斐博・野田松太郎, 近似的 GCD と Padé 近似の関係, 数理解析研究所講究録 920 「数式処理における理論とその応用の研究」, 1995, 74–81.